Mechanisches Rechnen

Consul, the Educated Monkey

Dirk Fox

Das 1x1 ist nicht erst für heutige Siebenjährige eine Herausforderung – schon vor 100 Jahren musste man „da durch". Und schon damals haben findige Pädagogen und Tüftler darüber nachgedacht, wie man diesen Lernprozess ein wenig annehmlicher, anschaulicher und attraktiver gestalten kann. 1915 fand William H. Robertson eine faszinierende Lösung: Consul.

Geschichte

„Consul, The Educated Monkey" ist eine mechanische Rechenhilfe für Addition und Multiplikation zweier ganzer Zahlen aus {1, …, 12} aus dem Jahr 1915 (Abb. 1). Sie ist kinderleicht zu bedienen: Werden die Füße des Affen so eingestellt, dass sie auf die Summanden bzw. Faktoren zeigen, dann erscheint im Fenster zwischen den Händen des Affen das Rechenergebnis. Wer die Funktionsweise einmal „live" ausprobieren möchte, dem sei die Flash-Simulation [1] auf tan-gram.de und Windows-Nutzern außerdem die Implementierung von Reinhard Atzbach [2] empfohlen.

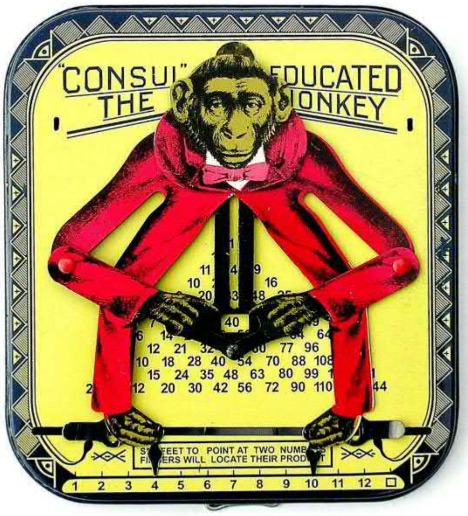

Abb. 1: Consul, the Educated Monkey (Educational Novelty Company, 1915)

„Consul, The Educated Monkey" wurde im Jahr 1915 vom Amerikaner William H. Robertson aus Belmont, Ohio zum Patent angemeldet. Am 27.06.1916 wurde ihm das Patent auf den „Educated Monkey" erteilt (Abb. 2); zweieinhalb Jahre später, am 26.11.1918, erhielt er ein zweites Patent auf die Mechanik (Abb. 3).

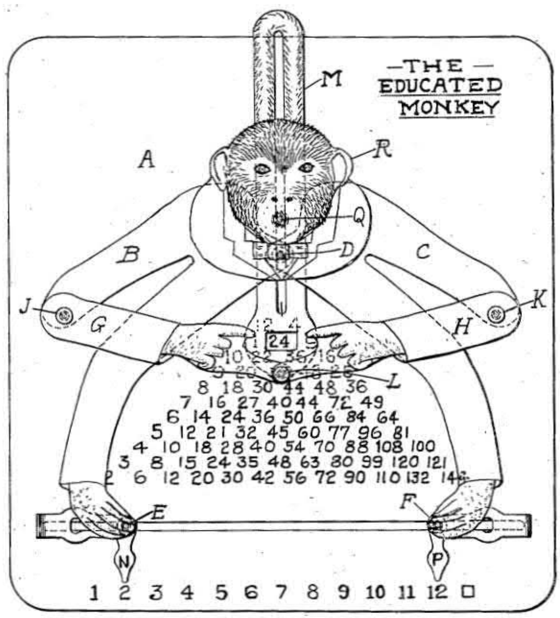

Abb. 2: Educated Monkey (US-Patent Nr. 1188490 vom 27.06.1916 [4])

Das von seiner *Educational Novelty Company* von 1915 bis 1922 verkaufte, aus Blech hergestellte ‚Rechenspielzeug' ist heute ein begehrtes Sammlerobjekt [5].

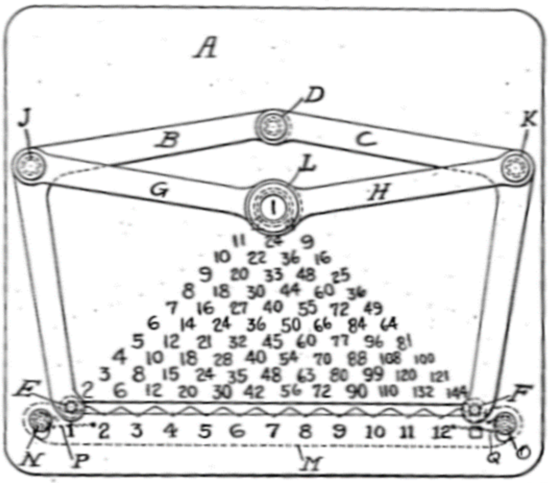

Abb. 3: *Mechanik des Educated Monkey (US-Patent Nr. 1286112 vom 26.11.1918) [4]*

Über den Hintergrund des Namens ‚Consul' gibt es lediglich Spekulationen. Eine sehr plausible führt ihn auf den Dokumentarfilm „Consul (the Great) Crosses the Atlantic" des Filmpioniers Charles Urban (1867-1942) aus dem Jahr 1909 zurück, der den ersten Besuch eines in Europa berühmten dressierten Affen namens Consul in den USA zeigt.

Abb. 4: Soenneckens „kleiner Rechner" von 1889 (Quelle: rechnen-ohne-strom.de [5])

Tatsächlich hat der ‚Consul' deutsche Wurzeln [5]. Der Verlag Friedrich Soennecken aus Bonn hatte bereits seit 1889 den „kleinen Rechner" im Angebot (Abb. 4), eine mechanische „Rechenmaschine" mit sehr ähnlichem Funktionsprinzip, wie das Patent von Friedrich Soennecken aus dem Jahr 1889 zeigt (‚Rechenvorrichtung zum Vervielfachen und Theilen' [6], Abb. 5).

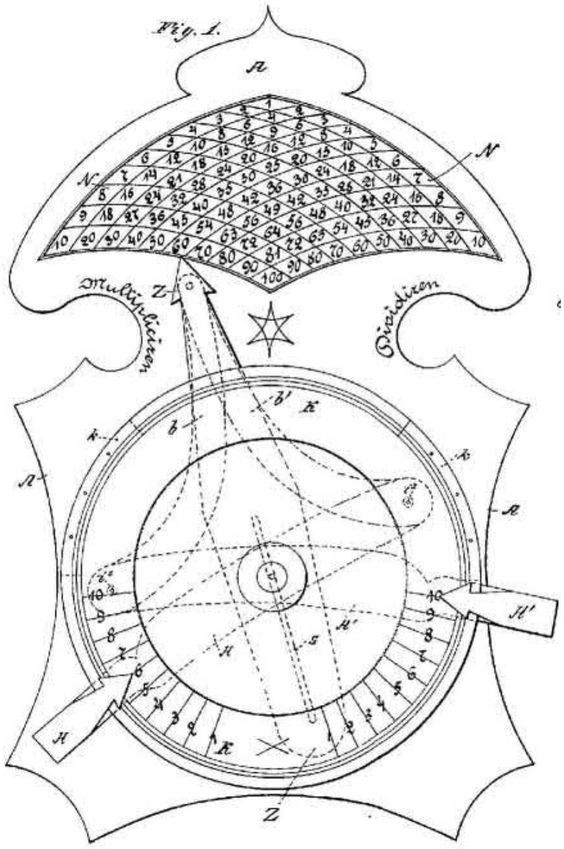

Abb. 5: Patent von Friedrich Soennecken (DRP 51445 vom 13.06.1889 [6])

Der fischertechnik-Consul

Originalgetreue Nachbildungen des Consul kann man für 13-20 € erwerben. Für einen wahren fischertechniker ist das natürlich keine Option: ein solch feiner Mechanismus gehört mit fischertechnik realisiert – und das gesparte Geld in eine Erweiterung der Teilesammlung investiert.

Dafür sind aber zunächst ein paar kleine Hürden zu nehmen – denn hinter der Mechanik lauert, ihr ahnt es, Mathematik.

Die Mechanik

Die Mechanik des Consul ist ein wenig trickreich. Wie man an Friedrich Soenneckens Patentzeichnung und Modell erkennt, liegen die Zahlen einer Zweier-, Dreier-, Viererreihe etc. im Unterschied zum Consul nicht auf einer Geraden. Das macht die Multiplikations- bzw. Additionstabelle etwas unübersichtlich und mindert die Eignung des „kleinen Rechners“ als Lernhilfe – schließlich soll er das Kopfrechnen nicht ersetzen, sondern trainieren.

Wie aber muss man die Mechanik konstruieren, damit die Additions- und Multiplikationstabellen des Consul ein schön strukturiertes Dreieck bilden?

Die Bedingung ist klar: Hält man ein „Bein“ des Rechenaffen fest und bewegt das andere nach links oder rechts, muss die Bewegung der Hände auf einer Geraden liegen. Diese Bedingung lässt sich mathematisch ausdrücken, wenn wir den Rechenaffen als geometrisches Gebilde zeichnen [7, 8]. Abb. 6 zeigt die Geometrie des Mechanismus‘ mit den Punkten *D*, *E*, *F*, *J*, *K* und *L* aus den Patentzeichnungen in Abb. 2 und 3:

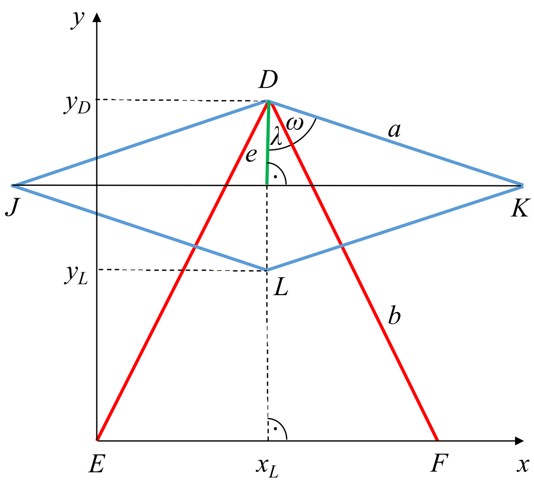

Abb. 6: Geometrische Konstruktion des Educated Monkey

Dabei wählen wir die „Arme“ des Rechenaffen so, dass Ober- und Unterarme gleich lang sind (blaue Linien, Länge *a*), und verbinden die „Beine“ (rote Linien, Länge *b*) in einem festen Winkel ω mit dem zugehörigen Oberarm. Wir halten nun den linken „Fuß“ (Punkt E) fest und bewegen den rechten (Punkt F) auf der x-Achse.

Dabei interessiert uns die Bewegungsgleichung des Punktes L = (x_L, y_L):

$$y_L = f(x_L)$$

Wie aber erhalten wir die Funktionsgleichung $f(x_L)$?

Da hilft wieder einmal ein wenig Trigonometrie. Alle erforderlichen Hilfsgrößen – den Winkel λ und die Höhe e (grüne Linie) – sind in Abb. 6 schon eingezeichnet. Wir erkennen leicht:

$$y_L = y_D - 2e$$

e und y_D wiederum sind Katheten zweier rechtwinkliger Dreiecke, daher gilt $e = a \cdot \cos(\omega + \lambda)$ und $y_D = b \cdot cos\,\lambda$, also folgt:

$$y_L = b \cdot cos\,\lambda - 2a \cdot cos(\omega + \lambda)$$

Nach den Rechenregeln für den Cosinus eines Winkels (Additionstheorem) gilt: $\cos(\omega + \lambda) = \cos\omega \cdot \cos\lambda - \sin\omega \cdot \sin\lambda$, also:

$$y_L = b \cdot \cos\lambda - 2a \cdot (\cos\omega \cdot \cos\lambda - \sin\omega \cdot \sin\lambda)$$

Oder (etwas umgestellt):

$$y_L = (b - 2a \cdot \cos\omega) \cdot \cos\lambda + 2a \cdot \sin\omega \cdot \sin\lambda$$

Dabei sind a, b und ω konstant, lediglich λ verändert sich, wenn der „Fuß“ F verschoben wird. Wir versuchen nun, λ durch x_L „auszudrücken“. Im rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken E, D und (x_L, 0) gilt: $\cos\lambda = \sqrt{1 - (\sin\lambda)^2}$ und $x_L = b \cdot \sin\lambda$.

Damit können wir in unserer Funktionsgleichung $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ ersetzen und erhalten y_L als Funktion von x_L:

$$y_L = (b - 2a \cdot \cos\omega) \cdot \sqrt{1 - \frac{{x_L}^2}{b^2}} + 2a \cdot \sin\omega \cdot \frac{x_L}{b}$$

Damit $y_L = f(x_L)$ eine lineare Funktion ist, muss der Wurzel-Term unabhängig von x_L gleich 0 sein. Jetzt können wir unsere Bedingung mathematisch exakt formulieren:

Die „Hände“ des Rechenaffen bewegen sich genau dann auf einer Geraden, wenn gilt:

$$b - 2a \cdot \cos\omega = 0$$

bzw.

$$b = 2a \cdot \cos\omega$$

Wir sehen: Damit die Bedingung erfüllt ist, müssen die Bein- und Armlängen unseres Rechenaffen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, das wiederum von der Größe des gewählten (festen) Winkels ω abhängt.

Die Modellkonstruktion

Damit die Beine unseres Rechenaffen auch echten Beinen ähneln, sollten sie – wie beim originalen Consul – ein leicht gebogenes Kniegelenk besitzen. Für die Wahl des richtigen Längenverhältnissen von Beinen zu (Ober-)Armen gehen wir aber zunächst einmal von geraden Beinen aus – die Länge eines abgeknickten Unterschenkels lässt sich später leicht experimentell bestimmen.

In dem fischertechnik-Modell des Consul in Abb. 7 habe ich als festen Winkel ω = 30° gewählt, als (Ober-) Armlänge a = 11 cm. Daraus errechnet sich die Länge eines (geraden) Beins wie folgt:

$$b = 22\ \text{cm} \cdot \cos 30° = 11 \cdot \sqrt{3}$$
$$\cong 19{,}05\ \text{cm}$$

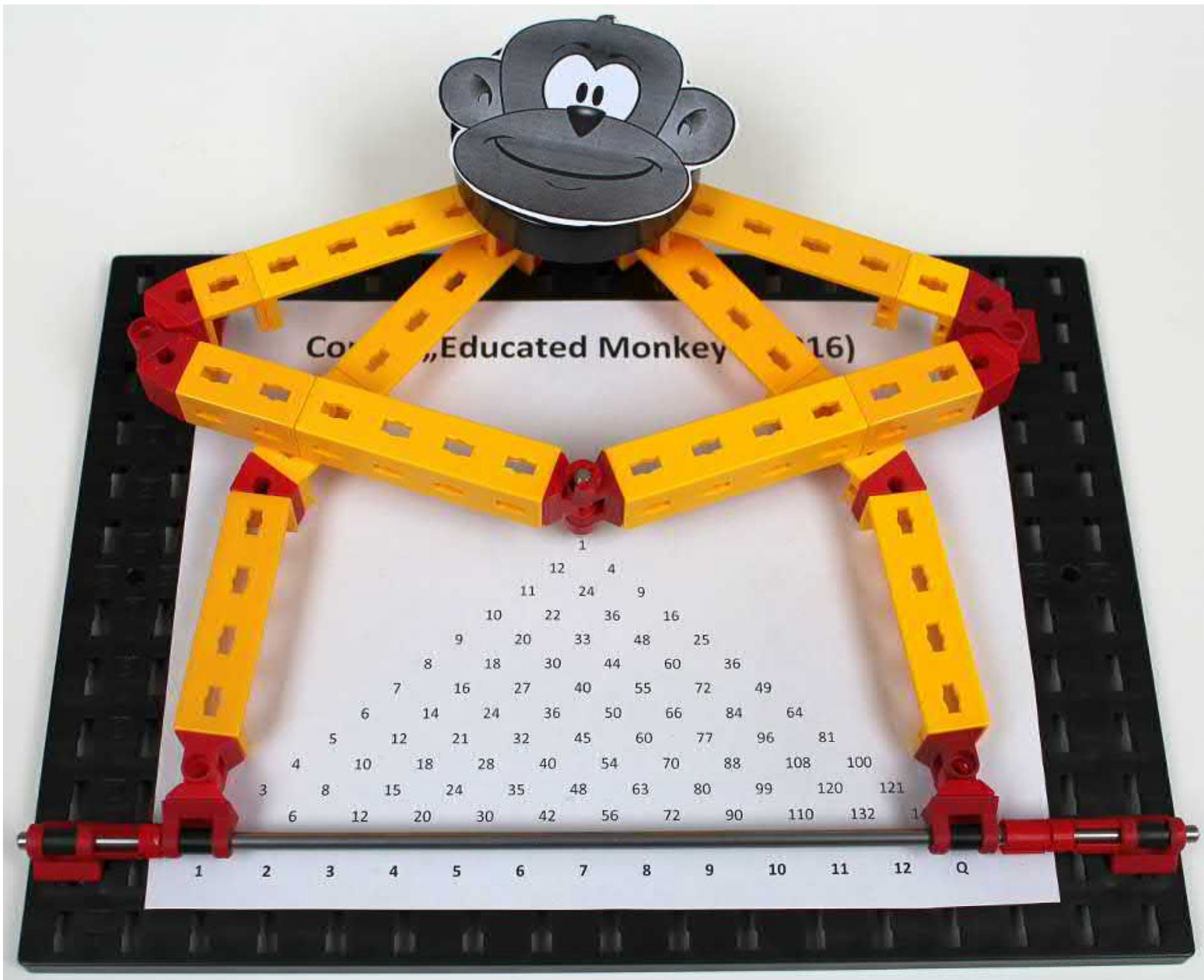

Abb. 7: Consul, The Educated Monkey aus fischertechnik

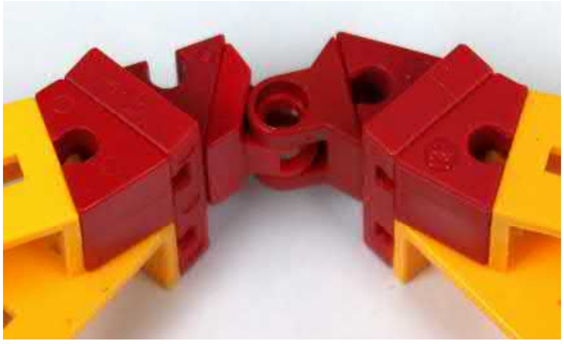

Abb. 8: „Kopfgelenk“

Die Konstruktion des in Abb. 7 verdeckten Kopfgelenks zeigt Abb. 8. Die Arme und Beine werden paarweise über eine Bauplatte 15x30x5 mit Nuten (38428) fest miteinander verbunden. Man erkennt gut die 30°-Winkelsteine, mit denen die Oberarme abgewinkelt werden. Beide Seiten werden über je einen Winkelstein 60° und eine Gelenkklaue verknüpft.

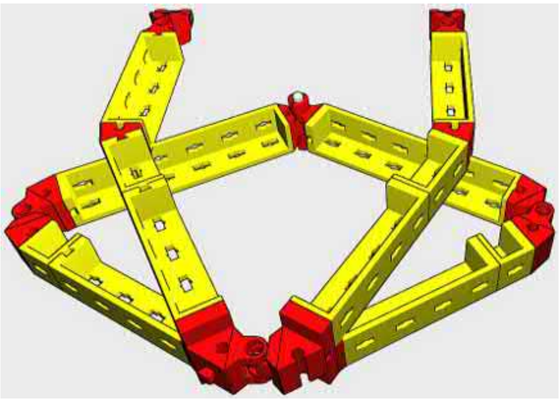

Abb. 9: Gesamtkonstruktion (von „hinten“)

Die 3D-Konstruktion in Abb. 9 zeigt die Mechanik des fischertechnik-Consul von hinten. Der gelbe Statik-Teil der Oberarme muss wegen der Kopfgelenk-Konstruktion eine Baulänge kürzer sein als der der Unterarme. Ober- und Unterarme sind über zwei Winkelsteine 30° und eine Gelenkklaue (als „Ellenbogen“) miteinander verbunden.

In Abb. 10 seht ihr die beiden Hände des Rechenaffen, die eine Metallstange 30 als „Zeigestift“ halten, und die Füße, die sich auf Gelenkwürfel-Klauen (31436) mit Lagerhülse (36819) auf einer Metallachse 260 (107436) verschieben lassen.

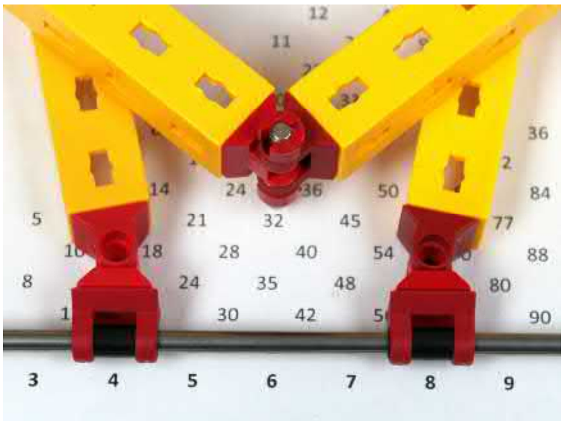

Abb. 10: „Füße“ und „Hände“

Fügt man im Bein nach 10,5 cm (sieben Bauhöhen) einen 30°-Winkelstein als Kniegelenk ein, muss man den Unterschenkel des Beins um 0,75 cm (= ½ Bauhöhe) verkürzen (Abb. 9).

Durch das Kopfgelenk wird eine Metallachse 60 mit Klemmbuchse 10 gesteckt, auf der der Kopf des Affen montiert wird. Dafür habe ich eine Schwungscheibe (39006) verwendet (Abb. 11) – alternativ tun es auch ein Rad 23 (36581), ein Walzenrad (35386) oder eine Drehscheibe 60 (31019).

Abb. 11: „Kopf“ (Unterseite)

Wer möchte, kann auf die Oberseite des Kopfes nun noch das Konterfei eines Affen kleben – wie z. B. das in Abb. 12 gezeigte, das unter Public Domain-Lizenz zum kostenlosen Download angeboten wird.

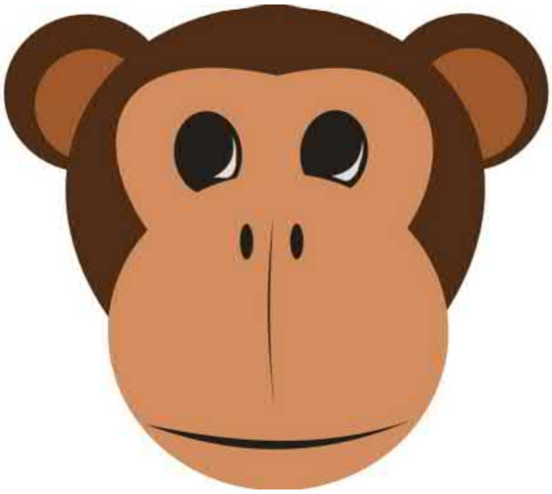

Abb. 12: Affenkopf (Public Domain)

Das Multiplikationsschema

Jetzt fehlt noch das Multiplikationsschema im Hintergrund. Mit einem Textprogramm lässt es sich sehr einfach erstellen, indem man eine „1" zentriert in die Mitte des Blattes schreibt und dann Zeile für Zeile die Zahlenwerte einträgt, jeweils voneinander durch einen Tabulator getrennt. In den Diagonalen von links oben nach rechts unten stehen dann (von links nach rechts) die 2er, 3er, 4er bis zur 12er Reihe – und in der ganz rechten alle Quadratzahlen von 1-144 (siehe Abb. 2, 3).

Anschließend markiert ihr das gesamte Zahlendreieck und wählt die Tabulatorlänge so, dass die unterste Zeile eine Breite von 16 cm hat. Schließlich stellt ihr die Zeilenabstände so ein, dass die Zahlenpyramide genau 7 cm hoch ist. Mit etwas Abstand (ca. 1 cm) wird darunter eine Zeile mit den Faktoren von 1-12, gefolgt von einem „Q" für Quadrieren eingefügt.

Auf dieselbe Weise lässt sich ein Additionsschema erstellen – da auch die Addition kommutativ ist, funktioniert unser Consul genauso gut als Additionswerkzeug [8].

Downloads

Die von mir verwendete Multiplikations- und Additionstabelle habe ich zum Download bereitgestellt.

Wer den fischertechnik-Designer verwendet, finden eine in Baugruppen strukturierte 3D-Bauanleitung im Downloadbereich der ft-Community.

Natürlich lässt sich auch ein Consul mit anderen Proportionen konstruieren – experimentiert ruhig einmal mit dem Winkel ω und der Oberarmlänge a.

Ich wünsche euch viel Vergnügen mit eurem fischertechnik-Consul!

Quellen

[1] Flash-Simulation (http://www.tangram.de/consul.pl)

[2] Reinhard Atzbach: *Consul the Educated Monkey für Windows*, 2001.

[3] William H. Robertson: *Toy*. US-Patent Nr. 1188490, 27.06.1916.

[4] William H. Robertson: *Calculation Device*. US-Patent Nr. 1286112, 26.11.1918.

[5] Wilfried Denz: *Rechenaffen*. Rechnen-ohne-Strom.de.

[6] Friedrich Soennecken: *Rechenvorrichtung zum Vervielfachen und Theilen*. Deutsches Reich Patent Nr. 51445, 13.06.1889.

[7] Dörte Haftendorn: *Educated Monkey oder „Der rechnende Affe"*. 19.09.2008.

[8] Sidney J. Kolpas, Gary R. Massion: *Consul, the Educated Monkey*. In: The Mathematics Teacher, Vol. 93, No. 4, April 2000, S. 276-279.